Institute for Research in
Fundamental Sciences

پژوهشگاه دانش‌های بنیادی

پژوهشکده ریاضیات

پیشنهادیه طرح با عنوان
" پیچیدگی مسئله احاطه‌گر زوج در گراف‌های دایره‌ای و k-ضلعی"

مجری طرح: محسن علمبردار میبدی
گروه ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر
دانشگاه اصفهان

همکاران خارجی طرح: Ta-Yu Mu و Ching-Chi Lin
از دانشگاه تایوان

بهار ۱۴۰۴

بیان مسئله و اهمیت موضوع

یافتن مجموعه احاطه‌گر[1] یکی از مسائل بنیادی در نظریه گراف است که کاربردهای فراوانی در طراحی شبکه‌ها، مکان‌یابی تأسیسات و تحلیل شبکه‌های اجتماعی دارد. در یک گراف $G = (V, E)$، مجموعه‌ای از رأس‌ها به نام $D \subseteq V$ یک مجموعه احاطه‌گر نامیده می‌شود اگر هر رأس $v \in V - D$ با حداقل یکی از اعضای D همسایه باشد. مسئله «مجموعه احاطه‌گر با اندازه کمینه» به‌دنبال یافتن کوچک‌ترین چنین مجموعه‌ای است. در دهه‌های اخیر، تعمیم‌های متعددی از این مسئله مورد بررسی قرار گرفته‌اند که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- احاطه‌گر کامل[2]: زیرگراف القا شده $G[D]$ فاقد رأس‌های منزوی باشد.
- احاطه‌گر متصل[3]: زیرگراف $G[D]$ باید متصل باشد.
- احاطه‌گر مستقل[4]: مجموعه D باید مستقل باشد، یعنی هیچ دو عضوی از آن با هم یال نداشته باشند.
- احاطه‌گر زوج[5]: زیرگراف $G[D]$ دارای یک تطابق کامل[6] باشد.

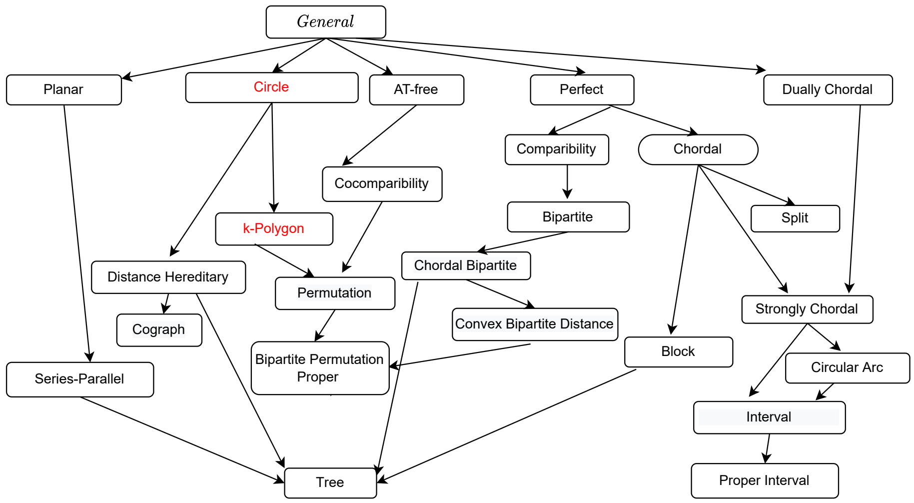
در احاطه‌گر زوج، هدف یافتن یک مجموعه احاطه‌گر است به‌طوری‌که زیرگراف القایی آن شامل یک تطابق کامل باشد؛ به‌عبارت دیگر، بتوان رأس‌های مجموعه را به‌صورت زوج‌های مجاور با هم جفت کرد. این مفهوم ابتدا در زمینه پایش ناحیه‌ای مطرح شد که در آن نگهبانان در رأس‌های گراف قرار می‌گرفتند و هر نگهبان باید با یک نگهبان مجاور جفت شود تا در صورت نیاز، جانشین یکدیگر باشند. پس از آن، این مدل در حوزه‌هایی مانند امنیت، تخصیص منابع، مکان‌یابی، ارتباطات شبکه‌ای و نظریه کدگذاری نیز کاربرد پیدا کرد. مسئله یافتن احاطه‌گر زوج با اندازه کمینه در گراف‌های کلی، در پژوهش‌های پیشین به‌عنوان یک مسئله NP-Complete معرفی شده است [۱].

اهمیت موضوع

به‌دلیل ویژگی‌های ساختاری خاص احاطه‌گر زوج، این مفهوم در کاربردهای واقعی که نیاز به پشتیبانی دوگانه یا تحمل خطا دارند، بسیار کاربردی است. از سوی دیگر، گراف‌های دایره‌ای که از مدل تقاطع وترها روی دایره تشکیل می‌شوند، در کاربردهایی مانند طراحی مدارات، تحلیل توالی ژنتیکی، و مدل‌سازی تقاطع‌ها در شبکه‌های ارتباطی نقش مهمی دارند. نویسندگان در [۲] (مقاله ای در ژورنال الگوریتمیکا یکی از ژورنال

1) Dominating Set
2) Total Domination
3) Connected Domination
4) Independent Domination
5) Paired Domination
6) Perfect Matching

های شناخته شده در علوم کامپیوتر نظری) پیچیدگی مساله یافتن احاطه گر جفت در گراف های دایره ای را به عوان سوال باز مطرح کرده اند که این پژوهش با هدف تحلیل پیچیدگی مسئله احاطه‌گر زوج در گراف‌های دایره‌ای و همچنین طراحی الگوریتم‌های کارا برای کلاس خاصی به‌نام k-ضلعی [7] (به‌عنوان زیرکلاسی از گراف‌های دایره‌ای) صورت گرفته است. نتایج اولیه به‌دست‌آمده نشان می‌دهد در گراف‌های دایره‌ای این مسله سخت و در گراف‌های k-ضلعی میتوان الگوریتم چند جمله‌ای ارایه کرد و در نهایت روش های پیشنهادی می‌تواند مبنای توسعه الگوریتم‌های تقریبی یا دقیق در گراف‌های دایره‌ای و ساختارهای مشابه در مسائل ترکیبیاتی باشد.



شکل ۱: سلسله‌مراتب کلاس‌های گراف. کادر قرمز نشان‌دهنده تمرکز این پروپوزال است.

References

[۱] Teresa W Haynes، Stephen Hedetniemi، and Peter Slater. Fundamentals of domination in graphs. CRC Press، ۱۹۹۸.

[۲] Ching-Chi Lin، Keng-Chu Ku، and Chan-Hung Hsu. Paired-domination problem on distance-hereditary graphs. Algorithmica، ۸۲(۱۰):۲۸۰۹–۲۸۴۰، ۲۰۲۰.

قسمتی از نتایج اولیه در موضوع این پژوهش

Theorem 1.0 *The paired-domination problem is NP-complete in circle graphs.*

3SAT-based Proof

It is straightforward to verify that the paired domination problem belongs to the class NP. To establish NP-hardness, we construct a polynomial-time reduction from the well-known $3SAT$ problem to the problem of determining the existence of a paired-dominating set. Let $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ denote the set of boolean variables, and let $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ represent the collection of clauses in an arbitrary $3SAT$ instance, say I. Our approach proceeds in two main steps. First, we construct a circle graph $G(I)$ corresponding to instance I. Second, we identify

7) k-Polygon Graphs

an integer k such that $G(I)$ contains a paired-dominating set of size k if and only if the original $3SAT$ instance I is satisfiable. We now describe the construction of the graph $G(I)$ as part of the reduction. Without loss of generality, we assume that each variable appears exactly once in every clause. The construction begins by selecting an arbitrary point on a circle to serve as the origin. Based on this origin, the graph $G(I)$ is formed through a set of chords representing the variables and clauses, ensuring that the interactions among them encode the logical structure of I.

- We partition the circle into m disjoint open intervals $[s_j, s'_j]$, where $1 \leq j \leq m$, each corresponding to a distinct clause in the formula .

Gadget for each literal:

- For each literal l, where $1 \leq l \leq 3$, appearing in clause C_j, we introduce two chords: t and f, representing the truth assignments of the literal. Including chord t in the paired-dominating set corresponds to assigning the literal a truth value of `true`, while including chord f corresponds to assigning it `false`.

- For each literal in clause C_j we create a pairs of chords p. The purpose of each such pair is to dominate them by including the chords t or f.

- For each chord t, we introduce a pair of chords, denoted by v and u. Then, three exclusive chords are added such that they intersect with chord v, as illustrated in Figure **??**. These exclusive chords are designed to be dominated only when chord v is included in the paired-dominating set, thereby enforcing the selection of v in certain configurations.

- For each chord f we create a pair of chords w and z. Then Three exclusive chord crossing the chord w as shown in Figure **??**. The purpose of exclusive chords is to dominate them by including the chords w.

  It is easy to investigate that the minimum paired domination in Figure **??** must include v and w and at least one of chords t or f. It is necessary to mention exactly one of t or f must be in any paired dominating set.

- For each t chord in clause C_j we create three chords h_1, h_2 and h_3 such that left endpoints of h_1, h_2, h_3 are in t chords of the first, second and third literal, respectively. The right endpoints of h_1, h_2, h_3 are connected to three private chord a_1, a_2, a_3, and two guard chord g_1 and g_2, each have three private chords, that are between chord a_1, a_2 and a_2, a_3, respectively. The purpose of each will discussed later.

In the above construction, we obtain m pairwise disjoint sections, each section associated with one clause. In the second part of our construction, we use some connection chords that force a variable to have the same truth value throughout all clauses. This is known as the consistency condition.

Second Step: Consistency Condition

To ensure consistency of truth assignments across all clauses, we introduce a set of connection chords: tt, ft, tf, uu, uz, zu, and zz. These chords serve to link corresponding literals between different clauses, enforcing that each literal maintains a consistent truth value throughout the formula.

- If a variable x_i appears (either positively or negatively) in two clauses C_j and C_k, we introduce two chords, denoted uz and zu, to connect the corresponding sections of these clauses. Specifically, the left endpoint of chord uz lies within the u chord of the literal x_i

in clause C_j, and its right endpoint lies within the z chord of the same literal in clause C_k. Similarly, the chord zu has its left endpoint in the z chord of clause C_j and its right endpoint in the u chord of clause C_k. Additionally, we add two chords, tf and ft, to encode consistency of truth assignments. The left endpoints of tf and ft are placed in the t and f chords of literal x_i in clause C_j, while their right endpoints are placed in the f and t chords of clause C_k, respectively. These connections ensure that the truth value assigned to x_i remains consistent across both clauses.

- If a variable x_i appears as a positive literal in clause C_j and as a negative literal in clause C_k (or vice versa), we introduce a chord tt between the corresponding sections of clauses C_j and C_k. The left endpoint of this chord lies within the truth interval of literal x_i in clause C_j, while the right endpoint lies within the truth interval of x_i in clause C_k. Additionally, we add two chords, uu and zz, to preserve structural consistency. The left endpoints of these chords are placed within the u and z chords of literal x_i in clause C_j, and their right endpoints are placed within the corresponding u and z chords of the same literal in clause C_k, respectively.

The key idea of our proof is as follows. Suppose that clause C_j is satisfied by some assignment of truth values to the variables. In this case, we can construct a paired-dominating set that contains the chords t and v corresponding to the true literals, and the chords f and w corresponding to the false literals in C_j. The chord t dominates the h chords, while the remaining h chords are dominated by the corresponding a chords. Furthermore, we must include two guard chords, g_1 and g_2, in any paired-dominating set due to their associated private chords. To ensure that exactly one of the chords t and f associated with a literal l in clause C_j appears in the paired-dominating set, we introduce a pair of independent chords, p, associated with the literal l. These chords are adjacent to both t and f, but to no other chords. Clause C_j is satisfied if and only if at least one of the three literals in C_j is true. This condition is represented by the inclusion of at least one of the t chords in the paired-dominating set. Such a chord will dominate the t, f, and the private chords p, as well as one of the corresponding chords h_1, h_2, or h_3. To dominate the remaining h_i chords associated with the other literals in C_j, we must include the corresponding a_i chords in the set.
Let $k = 16m$, where m denotes the number of clauses. Theorem 1.0 directly follows from the result stated below.

Lemma 2.0 *The graph $G(I)$ has a paired-dominating set D of cardinality at most $k = 16m$ if and only if the instance I is satisfiable.*

Lemma 3.0 *The $3SAT$ instance I is satisfiable if $G(I)$ has a paired-dominating set of cardinallity at most $k = 16m$.*